O. N. German, E. L. Lakshtanov, Application of Spectral Theory to Constructing a Puzzle on the Basis of the Minesweeper Computer Game, *Mat. Zametki*, 2010, Volume 88, Issue 6, 935–937

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm8917

Математические заметки

Том 88 выпуск 6 декабрь 2010

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Применения спектральной теории для создания головоломки на основе компьютерной игры Minesweeper

О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов

Компьютерная игра–головоломка «сапер» благодаря своему широкому распространению может служить своеобразным мостом между миром профессиональной математики и широкой общественностью. Заметим также, что она уже становилась объектом серьезных математических исследований [1]–[4].

Используя спектральные свойства дискретных конечномерных дифференциальных операторов, мы показали, что некоторые конфигурации открытых клеток гарантируют наличие и единственность решения. Также приведены некоторые алгоритмы построения таблиц, приводящие к играм–головоломкам на бумаге различной сложности.

Формальное описание игры. Пусть G является конечным неориентированным графом[1] с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Для каждой вершины $v \in V(G)$ определим множество ее соседей

$$N_G(v) = \{w \in V : vw \in E(G)\}.$$

Пару (A, f), где $A \subset V(G)$ и $f\colon A \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, будем называть *открытием*, если существует подмножество $M \subset V(G) \setminus A$ такое, что $f(v) = |N_G(v) \cap M|$ для любого $v \in A$.

Решением открытия (A, f) мы будем называть нахождение соответствующего множества M. Множество A мы будем называть *множеством открытых клеток* и M мы будем называть *множеством мин*.

Конечно, каждое открытие теоретически позволяет играть в «сапер на бумаге», но для удобства игрока мы будем рассматривать открытия (A, f), допускающие единственное решение. Такое условие не только позволяет игроку сверять полученный ответ с решением, но и дает осознание детерминированности игры, т.е. того, что наличие или отсутствие мины в каждой клетке предопределено.

Определение. Открытие (A, f) называется *таблицей для «сапера на бумаге»* тогда и только тогда, когда она имеет единственное решение.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00518); работа второго автора выполнена при поддержке Center for Research and Development in Mathematics and Applications (CIDMA) из «Fundação para a Ciência e a Tecnologia» (FCT) и European Community Fund FEDER/POCTI, а также исследовательского проекта FCT (грант PTDC/MAT/113470/2009).

[1] Для игры предполагается, что G имеет конкретное графическое представление, такое что каждая вершина представляет собой клетку, где может быть расположено или «мина», или число.

Подготовка игровой таблицы может быть произведена следующим способом. Для любых двух подмножеств $A \subset V(G)$, $M \subseteq V(G) \setminus A$ определим функцию

$$f_{(A,M)}(v) = |N_G(v) \cap M|, \qquad v \in A. \tag{1}$$

По построению множество M является решением открытия $(A, f_{(A,M)})$, так что остается в этом случае лишь решить вопрос о его единственности.

Случай классической компьютерной игры «Minesweeper». В компьютерной игре «Minesweeper» таблицей является прямоугольное подмножество R решетки $\mathbb{Z}^2$ размера $m \times n$, $m \leqslant n$:

$$V(G) = R = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Для любого $\boldsymbol{i} \in R$ множество его соседей определяется как $V_{\boldsymbol{i}} = \{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V_r\} \cap R$, где

$$V_r = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, -1), (-1, 0)\}.$$

Формулировка основного результата. Простейшим примером данной модели являются таблицы размера $2 \times n$ с верхней строкой A. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть*

$$R = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i \leqslant 2,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

и $n + 1$ не делится на 3. Пусть A является одной из двух строк R, например,

$$A = \{(1, i) \in R \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Тогда для любого множества мин $M \subset R \setminus A$ открытие $(A, f_{A,M})$ допускает ровно одно решение.

Теорема доказывается индуктивным вычислением определителя 3-диагональной матрицы. Используя спектральные свойства двумерных дискретных лапласианов, можно доказать следующие две теоремы.

Теорема 2. *Пусть*

$$R = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

и числа $n + 1$ и $m + 1$ взаимно просты. Пусть A является подмножеством R в форме шахматной раскраски:

$$A = \{(i, j) \in R \mid i + j \ \textit{четно}\}.$$

Тогда для любого множества мин $M \subset R \setminus A$ открытие $(A, f_{A,M})$ допускает ровно одно решение.

Таблицы на основе разбиения плоскости на правильные треугольники. Пусть соседи элемента $\boldsymbol{i} = (i, j) \in R$ определяются правилом $V_{\boldsymbol{i}} = \{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V_t\} \cap R$, где

$$V_t = \{(0, 1), (1, 1), (1, 0), (-1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, -1), (-1, 1),$$
$$(0, 2), (0, -2), ((-1)^{i+j}, 2), ((-1)^{i+j}, -2), \}.$$

Для графического представления графа, где каждая вершина соответствует правильному треугольнику, такое правило соседства означает, что соседями считаются треугольники, имеющие хотя бы одну общую вершину (см. рис. 1(b)).

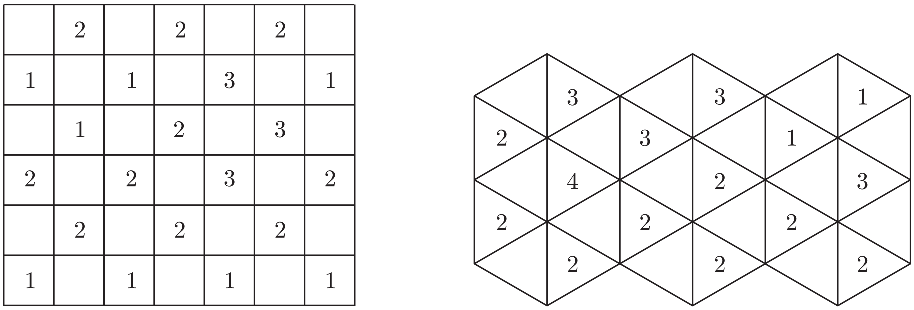
Теорема 3. *Пусть*

$$R = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

причем числа $m + 1$ и $n + 1$ не делятся на 4, и пусть правила соседства задаются множеством V_t. Пусть A является подмножеством R в форме шахматной раскраски:

$$A = \{(i, j) \in R \mid i + j \ \textit{четно}\}.$$

Тогда для любого множества мин $M \subset R \setminus A$ открытие $(A, f_{A,M})$ допускает только единственное решение.



(a) Поле с квадратными ячейками

(b) Поле с ячейками из правильных треугольников

Рис. 1. Примеры игровых полей

Следует отметить, что игры на базе таких таблиц, имеют более высокий уровень сложности благодаря большему числу соседей. Любопытным является тот факт, что именно в этих таблицах регулярно возникают ситуации, схожие с компьютерной игрой.

Алгоритм подготовки таблиц. Пусть m и n удовлетворяют условиям соответствующих теорем. Множество M в начале является пустым.

1) Для каждого элемента $\boldsymbol{i} \in R \setminus A$ выполним испытание Бернулли, и если результат равен 1, добавим $\boldsymbol{i}$ в M. Вероятности p и q могут быть взяты равными 1/2.

2) После проведения испытаний для всех элементов $R \setminus A$ определим функцию $f_{A,M}$, следуя (1), и заполним все клетки $\boldsymbol{i} \in A$ значениями $f_{A,M}(\boldsymbol{i})$.

Первый шаг этого алгоритма может быть изменен во избежание ситуаций, когда для некоторых $\boldsymbol{i} \in A$ выполняется

$$f_{(A,M)}(\boldsymbol{i}) = \#(V(\boldsymbol{i})) \qquad \text{или} \qquad f_{(A,M)}(\boldsymbol{i}) = 0. \tag{2}$$

Предлагается заполнить первый ряд независимо, а затем производить заполнение оставшихся рядов, начиная со второго и до последнего, заполняя каждый ряд слева направо и принимая во внимание имеющееся на данный момент распределение мин. То есть, если для некоторой открытой клетки решается вопрос о заполнении миной последнего ее соседа, то решение принимается так, чтобы избежать (2). Реализацию этих алгоритмов см. в [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. Kaye, “Minesweeper is NP-complete”, *Math. Intelligencer*, **22**:2 (2000), 9–15. **[2]** R. Kaye, *Infinite Versions of Minesweeper are Turing Complete*, Preprint no. B15 2TT, Univ. of Birmingham, 2000, `http://web.mat.bham.ac.uk/R.W.Kaye/minesw/infmsw.pdf`. **[3]** A. Adamatzky, “How cellular automaton plays Minesweeper”, *Appl. Math. Comput.*, **85**:2-3 (1997), 127–137. **[4]** E. Mossel, “The minesweeper game: percolation and complexity”, *Combin. Probab. Comput.*, **11**:5 (2002), 487–499. **[5]** `http://www2.mat.ua.pt/jpedro/minesweeper/the-tablep.htm`.

О. Н. Герман
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `german@mech.math.msu.su`

Поступило
16.03.2010

Е. Л. Лакштанов
Department of Mathematics, University of Aveiro, Португалия
E-mail: `lakshtanov@rambler.ru`